

## PROBABILITAT vs PROVABILITAT

### TANGRAM DE PARADOXES SOBRE EL COMPORTAMENT ECONÒMIC EN RELACIÓ A LA INCERTESA I EL RISC

Joaquim M. Perramon. Seminari IAFI 25 d'abril de 2008

#### Introducció

Expliquen Bosch i Silvestre (2007), que actualment la teoria del comportament econòmic envers el risc i la incertesa compta amb dos paradigmes: el de Bernoulli establert per John von Neumann i Oskar Morgenstern<sup>1</sup> a partir de la coneguda paradoxa de Sant Petersburg de Daniel Bernoulli i la Prospect Theory paradoxa sobre el primer paradigma, de Daniel Kahneman i Amos Tversky.

Una altra paradoxa, la de Maurice Allais, presentada l'any 1952 ja posava de manifest el trencament de la coherència del paradigma dominant, la qual cosa aplanà el camí de Kahneman i Tversky

En la present comunicació intento encaixar aquestes paradoxes aprofitant idees ja presentades anteriorment en aquest mateix seminari sobre la relació la construcció coherent d'una probabilitat subjectiva mitjançant la utilització de l'Extensió del Principi d'Indiferència<sup>2</sup>.

A la vegada de manera complementària faig servir quatre paradoxes més i per això m'ha semblat adient considerar aquest encaix múltiple com un *tangram* que és un trencaclosques d'origen xinès consistent en unes figures geomètriques que es combinen generant formes possibles entre elles un quadrat

#### La paradoxa de sant Petersburg -1-

Daniel Bernoulli en primer lloc explica com calcular el valor matemàtic d'un resultat possible. Per exemple, si tenim un bitllet de loteria amb el que es pot guanyar 20.000 ducats amb una probabilitat del 50 % i també és la mateixa probabilitat pot ser que no es guanyi res, el valor matemàtic d'aquest bitllet és 10.000 ducats. Entesos.

La paradoxa es produeix en què l'elecció d'un particular difereix del valor matemàtic. Veiem com:

Primer exemple.

Seria correcte que algú comprés o vengués aquest el bitllet de loteria esmentat per 9000 ducats quan el seu valor matemàtic son 10.000 ducats?

---

<sup>1</sup> Theory of games and economic behavior, 1947

<sup>2</sup> Perramon, 2007

Un pobre que s'hagi trobat aquest bitllet de loteria possiblement preferirà 9000 ducats a la butxaca amb certesa que no pas una expectativa de 20000 amb probabilitat del 50 %.

Sobre això hi ha dos aspectes a destacar. Primer és la distinció entre el valor matemàtic i la utilitat. El pobre prefereix assegurar el guany i vendre per un preu inferior al valor matemàtic.

El segon aspecte a destacar és que la utilitat no és la mateixa per a tothom i depèn de les circumstàncies de cadascú.

### Segon exemple

La paradoxa de Sant Petersburg s'ha polaritzat amb el següent joc: Un casino hipotètic ens ofereix un joc consistent en tirar una moneda de manera que si surt cara s'acaba el joc i es guanyen 2, però si surt creu es torna a llençar la moneda. En la segona tirada si surt cara es guanyen  $2^2 = 4$  monedes i s'acaba el joc i si surt creu es torna a llençar i així successivament.

El valor matemàtic d'aquest joc serà:

$$\text{Valor esperat} = 1/2 \cdot 2 + (1/2)^2 \cdot 2^2 + (1/2)^3 \cdot 2^3 \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

La pregunta és quan hauria de fer pagar l'aposta el Casino per a que el joc resultés equitatiu i si algú estaria disposat a acceptar-ho.

En principi per fer el joc equitatiu l'aposta també hauria de valer infinit i Bernoulli va observar que la majoria de la gent no estaria disposada a pagar massa per entrar. Aquest comportament s'anomena aversió al risc i ha donat lloc al naixement de la teoria del comportament o decisió a partir dels treballs de Van Neumann i Oskar Morgenstern<sup>3</sup>

La teoria del comportament, partint del principi segons el qual la gent quan ha de prendre una decisió opta per l'alternativa que més l'interessa, això és la que maximitza la seva utilitat, i de la hipòtesi de l'aversió al risc, defineix la funció d'utilitat esperada com un sistema consistent de considerar les preferències individuals.

Aquesta consistència de la funció d'utilitat es fonamenta en uns axiomes: el d'asimetria (preferim una opció A un altre B que denotem per  $U(A) > U(B)$ ); el transitiu Si  $U(A) > U(B)$  i  $U(B) > U(C)$  llavors  $U(A) > U(C)$  i el d'independència (si  $U(A) > U(B)$  llavors  $p \cdot U(A) + (1-p)U(C) > p \cdot U(B) + (1-p)U(C)$ ;  $0 < p < 1$ )

Considerant els exemples de Bernoulli, per comptes multiplicar les probabilitats per les quantitats de diner (*pretium*) i determinar el valor matemàtic, el que es fa és multiplica la probabilitat per la 'utilitat' que les diverses quantitats reporten a la persona (*emolumentum*)

---

<sup>3</sup> Theory of games and economic behavior, 1947

## Paradoxa d'Allais -2-

L'any 1952 Maurice Allais va presentar els resultats d'un experiment que contradiuen la Teoria de la Utilitat Esperada.

Considerem que hem de triar entre les opcions A i B, això és:

Alternativa A: rebre 100 milions de francs amb seguretat

Alternativa B

Probabilitat 0,1 de rebre 500 milions  
Probabilitat 0,89 de rebre 100 milions  
Probabilitat 0,01 de no rebre res

El valor matemàtic de l'alternativa A és 100 i el de l'alternativa B és 139, tanmateix per allò de 'el peix al cova' l'elecció pot ser fàcilment la A

La segona elecció és entre les opcions B i C que consisteixen en:

Alternativa C

Probabilitat 0,11 de rebre 100 milions  
Probabilitat 0,89 de no rebre res

Alternativa D

Probabilitat 0,1 de rebre 500 milions  
Probabilitat 0,9 de no rebre res

En l'experiment els enquestats trien D

Doncs bé, seguint els axiomes d'utilitat esperada un individu que prefereixi A a B també hauria de preferir C a D i si no es viola la funció d'utilitat esperada. Vegem-ho:

Si  $U(A) > U(B)$

llavors  $U(100) > 0,1 \cdot U(500) + 0,89 \cdot U(100) + 0,01 \cdot U(0)$  és a dir que

$$\boxed{0,11 \cdot U(100) > 0,1 \cdot U(500) + 0,01 \cdot U(0)}$$

D'altra banda si  $U(D) > U(C)$

$0,11 \cdot U(100) + 0,89 \cdot U(0) < 0,1 \cdot U(500) + 0,9 \cdot U(0)$  és a dir que

$$\boxed{0,11 \cdot U(100) < 0,1 \cdot U(500) + 0,01 \cdot U(0)}$$

Les expressions requadrades es contradiuen.

La paradoxa d'Allais és de les que poden donar mal de cap. En primer lloc posa de manifest una feblesa que per molt que es justifiqui no es dissimula, i en segon lloc com a bona paradoxa no ofereix una visió teòrica alternativa sinó que resta a l'espera de la teoria que la resolgui.

### **Prospect theory –paradoxa 3-**

La teoria de la perspectiva (*the prospect theory*) d'Amos Tversky i Daniel Kahneman va popularitzar la noció de que la gent mostra aversió pel risc quan s'avaluen opcions que reporten guanys; i atracció pel risc quan s'avaluen opcions que reporten pèrdues.

Des del punt de vista de la funció d'utilitat aquests resultats correspondrien a una situació de múltiples jos<sup>4</sup>. Es podria esperar que una persona tingui aversió o atracció pel risc però no que aversió o atracció segons les circumstàncies.

Bosch-Domènech i Silvestre analitzen aquesta contradicció realitzant els seus propis experiments i sense ficar-se, tal com diuen<sup>5</sup>, en considerar si la gent té una valoració subjectiva de les probabilitats que no coincideix amb el valor objectiu, i aquest és precisament un dels aspectes a abordar en la present comunicació.

Segons Tversky i Kahneman, nosaltres acostumem a simplificar els problemes que se'ns plantegen seguint unes regles entre les que destaquen tres:

Primera regla Quan s'avaluen alternatives ens fixem en la pèrdua o guany que produiran respecte el punt de partida i no per el resultat absolut

Segona regla En alternatives que produiran un guany preferim un guany cert que no un altre hipotèticament major però incert. Davant de pèrdues, al contrari, abans de tenir una pèrdua certa preferim arriscar-nos per tal d'evitar la pèrdua si bé el risc pot comportar que la pèrdua resultant sigui major.

Tercera regla Tenim més sensibilitat en front de les pèrdues que enfront dels guanys

Aquestes regles, d'entrada semblen molt raonables. Un exemple

Alternativa A: tenir un treball per compte aliena on guanyem fixes 2000 euros  
Alternativa B: tenir un treball per compte pròpia on podem guanyar

Amb probabilitat 50 % 1500 euros

---

<sup>4</sup> Expressió extreta del treball de Bosch-Domènech i Silvestre

<sup>5</sup> Bosch Domenech i Silvestre, 2007 p. 50

Amb probabilitat 50 % 3500 euros

Es possible que l'elecció A sigui comú. Això correspondria a l'aversion al risc. Aquesta elecció estaria d'acord amb la segona regla.

Ara girem l'exemple cap a una situació de pèrdues. Perdem el treball on guanyàvem 2000 euros i ens trobem amb les alternatives següents:

Alternativa C: trobem un treball fix per 1500 euros

Alternativa D: Ens posem pel nostre compte amb les següents possibilitats:

Amb un 50 % de possibilitats guanyem 1000 euros

Amb un 50 % de possibilitats guanyem 2000 euros

Llavors aquí els resultats vindrien a ser que elegim l'opció D. En teoria l'opció D és l'atracció pel risc si bé cal observar que sobretot és l'opció en la que la persona és queda en la situació inicial. Aquesta solució és coherent amb totes les regles.

Encara que s'hagi extret de cap experiment, tothom sap que la majoria d'empreses que es creen corresponen a situacions semblants a la descrita.

Aquest exemple que he posat jo té una diferència fonamental dels exemples habituals amb boles, urnes i demés. En el cas de les urnes es pot parlar de probabilitat objectiva en aquest cas segur que no. La probabilitat és una apreciació que fa el subjecte. Aquest preferirà l'opció D a la C perquè ho considera assumible.

Posem un exemple més exagerat. Com es pot considerar el subsaharià que es puja en una barca per assolir les costes d'Espanya i millorar el seu nivell de vida? L'elecció és

Alternativa A. Quedar-se. Pobresa assegurada

Alternativa B. Pujar a la barca

Sembla molt probable assoleix el benestar

Si te mala sort mor

Regla 1. Es fixarà que el guany respecte el punt de partida és molt elevat

Regla 2. Davant de pèrdues, al contrari, abans de tenir una pèrdua certa preferim arriscar-nos per tal d'evitar la pèrdua si bé el risc pot comportar que la pèrdua resultant sigui major.

Regle 3. Te molta sensibilitat per la pèrdua

Sembla que en aplicació d'aquestes regles s'hauria d'embarcar. Altre cop no hi juga una probabilitat objectiva. El subsaharià que s'embarca pensa senzillament que te expectatives de reeixir i que altres que ha mort ha estat conseqüència de la manca de fortuna

## Sobre la formació de les probabilitats

El passat curs vaig presentar una comunicació en el seminari IAFI en la que proposava una regla basada en la extensió del principi d'indiferència per a sospesar el grau de veritat o de falsetat d'una determinada hipòtesi.

La probabilitat d'aquesta manera derivada era el promig entre la creença i la plausibilitat. Tenim una aproximació de la creença, també tenim una aproximació de la plausibilitat i llavors el que fem es quedar-nos entre un i l'altre.

Per exemple tenim un quadre de Goya i no sabem si serà autèntic. Preguntem a dos experts el seu parer i un ens diu que de 1 a 10 ell valora amb un 8 la possibilitat de que sigui autèntic. L'altre ens diu que de 1 a 10 valora en 4 a possibilitat que sigui fals. Doncs la probabilitat a favor que assignarem serà igual  $7 (= (8+(10-4))/2)$ .

Això és exactament el mateix que agafar directament el promig del que opinen cada un dos  $7 (= 8+6/2)$ . Es a dir com que nosaltres no tenim ni idea de quadres el que fem es veure que diuen els experts i quedar-nos a la meitat.

La presentació d'aquesta idea a partir dels conceptes de credibilitat i plausibilitat és menys pràctica, menys directa però és més explícita conceptualment.

El principi d'indiferència comporta paradoxes. Martin Gardner, divulgador de les matemàtiques va posar l'exemple de la paradoxa de tità – **Paradoxa 4**:-

Hi ha vida al planeta Tità? No ho sabem. Si assignem una probabilitat del 50 per cent ( $=1/2$ ) per representar la nostra ignorància, llavors podem fer una segona pregunta: Hi ha vida vegetal? I altre cop la probabilitat assignada és del 50 per cent ( $1/2$ ); i que no hi hagi vida animal?, també  $1/2$ . Llavors, per calcular la probabilitat que no hi hagi vida a Tità, ni vegetal ni animal, hem de multiplicar les probabilitats respectives, això és  $1/2 * 1/2 = 1/4$ . Però si la probabilitat que no hi hagi vida és  $1/4$ , la probabilitat que hi hagi vida a Tità serà d' $1 - 1/4 = 3/4$ , en contradicció amb la hipòtesi de partida que afirmava que era d' $1/2$ .

La qüestió és que la persona que no tenint ni idea d'art treu el promig sobre el que li diuen els experts fa molt bé. Potser no a efectes de coneixement però sí a efectes de decisió.

Un altre exemple per a il·lustrar-ho. Un alumne no te ni idea d'una matèria i a l'examen li fan una pregunta que pot contestar marcant l'opció que consideri correcte A o B. Com que no te ni idea el millor que pot fer és agafar una moneda i segons surti cara o creu marcar una resposta o la altre. I si per comptes de dues respostes n'hi haguessin tres: A, B o C. Doncs ara ha d'agafar un dau i si surt 1 o 2 ha de marcar la A, si surt 3 o 4 marcar la B i si surt 5 o 6 ha de marcar la C.

Hi ha alguna contradicció? Es evidentíssim que no.

Aquesta probabilitat, com en el quadre del Goya, és una probabilitat a efectes de decisió i què depèn de l'estat d'ignorància. I si l'expert en art resulta que es un embaucador? Doncs és igual: nosaltres hem actuat racionalment i el Goya serà fals o potser no.

I això que diem és possible que sigui tal qual a la realitat ?. Això mi em sembla que sí. Amos Tversky va fer una teoria anomenada Support Theory que te com a enunciat més destacat l'anomenat *unpacking principle* o efecte desagregació. Un exemple d'aquest efecte seria un experiment consistent en que una actriu jove ingressa en un hospital d'urgències amb un dolor agut a la part inferior dreta de l'abdomen i es demana a un grup de metges que estimi la probabilitat de tres possibles diagnòstics: a.- gastroenteritis, b, embaràs i c, altres causes. A un altre grup de metges se li amplia la llista substituint c, altres causes per tres possibilitats, apendicitis, nefritis i inflamació pèlvica. El resultat és que si el primer grup de metges va atribuir a la gastroenteritis una probabilitat del 31 % , el segon li va assignar una probabilitat el 16 %. Aquest resultat paradoxal (**Paradoxa 5**) s'explicaria segons el que hem dit anteriorment referent al principi d'indiferència, Sembla que es reparteixi la ignorància.

Un altre resultat paradoxal que a mi em sembla relacionat amb aquest és l'anomenat 'choice overhead' desenvolupat per Sheena S. Iyengar i Mark Lepper segons el qual si l'excés d'opcions en una elecció és desmotivadora (**Paradoxa 6**). L'exemple és de que en un supermercat es fa una promoció de melmelades amb gustos exòtics. Primer s'exposen melmelades de sis gustos i en un segon experiment s'exposen melmelades de 24 gustos. En el primer cas solament s'aturen el 40 % de clients mentre que en el segon cas s'atura el 60 %. Tanmateix en el primer cas el 30 % va comprar alguna melmelada i en el segon cas solament va comprar un 3 % del que es van interessar.

.....

Després d'haver sostingut una procediment per representar la forma com es la persones elaboren la probabilitat subjectiva i veure com aquest mecanisme permetria l'encaix de les paradoxes explicades cal advertir que el millor que pot fer l'estudiant, millor que tirar la moneda per a decidir que fa, és estudiar i el comprador de quadres de Goya ha de buscar-se experts homologats,...en definitiva el problema de fons és el de la recerca de la veritat. La probabilitat objectiva correspon a lleis contrastades. El resultat és incert però la llei és es certa i ho sabem perquè hi hem arribat amb una experimentació. En canvi, encara que no ho sembli, quan analitzem un quadre clínic només anem tenint certesa en la mesura en que anem aprofundint en l'anàlisi. Una primera aproximació farà que ens manifestem d'acord amb el que preveu la regla de l'extensió del principi d'indiferència, i per tant no és paradoxal i a mesura que anem eliminant informació dolenta ens anirem aproximant a la veritat.

En aquests mateix sentit va la darrera **paradoxa (nº 7)** de Daniel Ellsberg.

Oferim un premi a una persona si encerta el color d'una bola que s'ha d'extreure d'una urna. Tenim dues urnes

- A.- L'urna A conté cinquanta boles blanques i 50 boles negres
- B.- L'urna B conté 100 boles, blanques o negres, i no sabem la proporció

El jugador ha de triar A o B.

El resultat de l'experiment dona que la gent prefereix l'urna A. Perquè? L'explicació que es dona és que la gent té aversió a l'ambigüitat perquè prefereix els riscos quantificables als desconeguts.

## COMENTARIS

D'aquest tangram de 7 peces (paradoxes) que encaixem gràcies amb la introducció del Principi d'Indiferència caldria fer els següents comentaris:

- La Paradoxa de Tversky-Kahneman és un segon paradigma en la teoria del comportament econòmic envers el risc.
- La teoria del comportament econòmic sota el nou paradigma de Kahneman està per construir.
- El Principi d'Indiferència (PI) pot ser un instrument adequat per a construir la nova teoria del comportament.
  - o El principi d'indiferència serveix per a la decisió i no per el càlcul de probabilitats. (modes de J. Bernoulli)
  - o El camí natural del Principi d'Indiferència ha de ser la veritat (prova científica) i no la probabilitat. El PI és provabilitat i no probabilitat.
  - o Partint de la credibilitat i passant per la plausibilitat assolim la provabilitat.
  - o La teoria de probabilitats continua sent bona per a decidir sobre allò que s'observa 'darrera la barrera', és a dir sense assolir protagonisme.
- La Teoria econòmica s'hauria de reconstruir amb la nova teoria del comportament
  - o La introducció del Principi d'Indiferència significa que hi haurà situacions de coneixement imperfecte o ignorància.
- La teoria de les finances també s'ha de reconstruir.
  - o L'element central de l'àmbit financer és el FUTUR.
  - o El futur pot ser considerat de dues maneres:
    - A.- Previsió Es el cas de quan s'està d'observador i es pot aplicar la Teoria de Probabilitats
    - B.-Objectiu. L'objectiu, per exemple en un pla d'empresa, és fixa en base al coneixement (provabilitat). Altre cop atenent el grau de coneixement s'ens donen dues possibilitats:
      - Coneixement sòlid (Model Tesi Joaquim Perramon)
      - Coneixement superficial (seguidisme)



## BIBLIOGRAFIA

Bernoulli, Daniel (1738). Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica*, n.22, 1954.

Bosch-Domènech, Antoni; Silvestre, Joaquim (2007). L'aversió al risc i les seves conseqüències teòriques i pràctiques. Societat Catalana d'Economia (filial de l'Institut d'estudis Catalans). Barcelona, 2007

Conthe, Manuel (2007). La paradoja del bronce (espejismos y sorpresas en el mundo de la economía y la política). Ed. Crítica. Barcelona, 2007.

Iyengar, Sheena S.; Lepper Mark R. When choice is demotivating: Can one desire too much of a good thing?

Pascale, Roberto (2005). Del hombre de chicago al hombre de Tverky-Kahneman. XXV Jornadas de SADAF. Vaquerías (Córdoba) República de Argentina.

Perramon Ayza, Joaquim M. (2007) *La regla d'extensió del Principi d'Indiferència per a sospesar el grau de veritat i de falsedat d'una mateixa hipòtesi* Quatre Elucubracions i un poema (ponències presentades al seminari Investigació en Anàlisi Financera i de la Incertesa). Ed. Impacto. Barcelona 2007