

Historia matemàtica del vot ¹

J J O'Connor y E F Robertson

JOC/EFR el 2002 de agosto

El URL de esta página es:

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Voting.html>

Traducció: Joaquim Perramon

Si nosaltres tenim dos candidats A i B i han de ser elegits segons el nombre de vots el sistema no presenta cap problema. Uns votan per A i altres per B. Tanmateix si el nombre de candidats és superior a dos el problema es complica. La pregunta és com s'han d'eliminar els candidats.

Per exemple, un dels primers sistemes de democràcia a Grècia fou introduït per Cleístenes a l'any 508 A.C. Era una forma bastant negativa d'elecció: cada any els votants eren consultats per pronunciar-se sobre quin polític havia d'abandonar la política per 10 anys. Els vots s'escriuien sobre una 'ostraka' i es posaven en olles, un cop trencada l'olla el polític era condemnat al desterrament ('ostracisme'). Si cap polític rebia més de 6000 vots tota romania en el càrrec, però si un no els rebia llavors era desterrat. D'aquesta manera s'assegurava que quan algú era inpopular el resultat era el desterrament.

L'estat venecià es formà en el s.XIII i allà elegien un Gran Concili de 40 membres que van arribar a ser 60 a mitjans de segle. Es van utilitzar diversos sistemes electorals, en particular un consistent en que si hi ha n candidats, els electors emetien un vot per cada candidat que consideren acceptable i cap per aquells que consideren innacceptable. Aquest sistema té l'avantatge de que el guanyador és la persona considerada acceptable pel nombre més gran de votants.

¿El sistema electoral de Cleístenes era correcte? ¿Era just el sistema electoral venecià? Per a contestar la pregunta de si un sistema electoral és just primer cal definir que significa ser just. En el cas dels dos candidats hi han arguments matemàtics, tal com va demostrar Kenneth May l'any 1952, per a considerar que solament existeix un procediment que compleixi els tres criteris de 'sistema just' :

- tots els votants son iguals;
- els candidats es tractan amb igualtat ;
- si el candidat guanya mentre rebí més vots

¹ N del T. Es una història del vot a seques però està en una enciclopèdia de matemàtiques.

Quan hi han més de dos candidats la situació és molt complicada: hi ha diverses definicions de 'just', i, conseqüentment, diferents sistemes electorals a proposar. Per exemple una suggerència és que si una persona ha de ser elegida d'un conjunt de n , l'elecció seria 'justa' si la persona s'hagués elegit en un concurs un-a-un amb la resta dels $n-1$ candidats restants. Malgrat que sembli 'just' hi ha el problema de que en poquíssims casos es pot trobar algu que guanyi a tothom un-a-un.

Llull, en el segle XIII, va proposar un sistema electoral basat en la definició de 'sistema just' descrit anteriorment per a l'elecció de l'abadesa d'un covent. La suggerència es fa en un manuscrit² que va arribar a mans de Nicolás de Cusa en el segle XV, si bé una descripció més completa de la proposta no ha sortit a la llum fins l'any 2001³. Encara que el sistema de Llull satisfà la propietat de que tots estariem d'acord en que el procediment és just hi ha el problema de l'elecció basada en aquests principis no pot generar un guanyador absolut

L'any 1433 Cusa, havent estudiat el treball de Llull y veient les deficiències, proposà un sistema diferent que sempre produiria un guanyador. Cusa va fer un document sobre com elegir els reis alemanys proposant el sistema següent. Si hi havia n candidats per a Rei, llavors els votants havien de donar un punt pel candidat menys preferit, dos punts pel següent candidat més preferit que el primer i així sucesivament fins al candidat més preferit per a Rei al qual se li donaria n punts. Aquest sistema encara s'utilitza avui en algunes eleccions però té la deficiència de que l'elegit pot no haver sigut el més preferit de ningú.

La idea de Llull 'd'elecció justa' es proposà de nou 500 anys després per Condorcet en el seu treball "*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*" (assaig sobre la aplicació de l'anàlisi de probabilitats a les decisions de la majoria) publicat l'any 1785. Aquest és un treball remarcable que situa a Condorcet dins de la història de probabilitat. El treball conté la Paradoxa de Condorcet que assenyala que és possible que una majoria de votants prefereixi al candidat **A** sobre un altre **B**, que una majoria pot preferir a **B** sobre **C**, i malgrat això una majoria pot preferir a **C** sobre **A**. Això és: la relació 'la majoria prefereix' no és transitiva de manera que l'elecció basada en la definició de Llull de "just" no necessàriament ha de donar un guanyador com a resultat. Una segona edició del

² N del T: l'abadesa s'elegeix a Blanquerna. Llull també va escriure De Arte electionis de 1299 actualment dipositat al Sant Nikolaus-Hospital i al que debia tenir accés Nicolás de Cusa.

³ N del T: es refereix a Artificio Electionis Personarum d'abans de 1283 descobert l'any 2001 a la Biblioteca Apostòlica Vaticana. Es pot trobar a Internet a <http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/llull/welcome.html>

treball de Condorcet, que incluïa nou material, es publicà l'any 1805 amb un títol diferent, anomenat “*Eléments du calcul des probabilités et son application aux jeux del hasard, el à la loterie et aux jugements des hommes*”.

Borda fou un contemporani de Condorcet que considerà que, malgrat que el sistema descrit per Lull, i posteriorment per Condorcet era ‘just’, no es podia aplicar. Borda proposà el sistema de fer un escalafó donant els punts corresponents a cadascú d'acord al seu rang tal com Nicolàs de Cusa havia fet en el segle XV. Hi havia un argument solid entre els dos matemàtics sobre quin dels dos sistemes de votació era el millor si bé ambdós sistemes tenien punts forts i punts febles, i no es va cloure la qüestió.

Nosaltres hem indicat com els principis de Borda i de Condorcet van ser abordats en el la època medieval . (...[referència interna a l'Enciclopèdia](#))

Explicarem tres procediments medievals, fins ara desconeguts pel '*social choice*'⁴ per discutir sobre els sistemes electorals quan hi ha me de dos candidats. Dos dels tres proposen el mètode de Condorcet de comparació de dos-a-dos i el tercer proposa el mètode de Borda.. Tots tres procediments discuteixen problemes de manipulació. Un d'ells desplega una matriu per a les comparacions dos-a-dos; aquest és un treball escrit l'any 1299, prop de 600 anys abans de la notació matricial que consideravam havia inventat C L Dodgson.

De fet l'any 1951 Kenneth Arrow, Premi Nobel d'Economia (1972), mostrà que cap sistema de votació pot ser ‘just’ en el sentit que generi un guanyador que serà preferit a qualsevol altre candidat i que el sistema serà tal que el resultat decisiu pot ser la conseqüència del procediment d'elecció seguit. Això podria portar a creure que el sistema de Borda ha de ser millor que el sistema de Condorcet, però també s'ha de notar que una deficiència major d'aquest sistema resulta de que els electors poden votar tàcticament per comptes de donar les seves vertaderes opinions. Un votant pot afavorir a un candidat **A** en una primera elecció i a un candidat **B** en una segona. Tanmateix posant **A** primer amb **n** vots y **B** a continuació, s'incrementa la possibilitat de que guanyi **A**. La votació tàctica pot portar resultats no desitjats o que no afavoreixin a ningú.

El sistema simple en el que cada votant dona un sol vot al seu candidat favorit també pot portar a la votació tàctica. Si a un votant li agradaria veure elegit a **C** però considera que és l'únic que pot evitar que **A** sorti elegit, llavors votarà **B** per comptes de **C**, la qual hagués estat la seva primera elecció. Una votació tàctica es va fer evident en una elecció a Escòcia en els anys

noranta. En aquesta elecció hi havien quatre partits majoritaris (i conseqüentment 4 candidats principals en la majoria de les regions) i els votants tenien un sol vot. No va ser elegit un sol candidat conservador malgrat que el partit tenia una proporció considerable de vots, perquè en aquelles regions on el candidat conservador podia guanyar molts partidaris de la resta de partits votaven per aquell candidat que consideraven derrotaria al candidat conservador.

La votació tàctica ens porta a pensar en la formulació rigurosa d'aquests problemes mitjançant la teoria de jocs. L'any 1944 von Neumann i Morgenstern publicaran la Teoria de Jocs i del Comportament Econòmic que permetia considerar conceptes com la votació tàctica amb una formulació matemàtica precisa. Tanmateix aquestes formulacions portaren a problemes com el del 'dilema del pressoner' que va il·lustrar la dificultat de reconciliar interessos individuals a favor d'una més favorable estratègia col·lectiva.. ¿Això consiciona les eleccions?

Abans de la invenció de la teoria de jocs, ja feia temps que s'havien fet propostes per a superar les deficiències dels sistemes de votació. Una proposta realitzada per Thomas Hare, John Stuart Mill i C C G Andrae a mitjans del s.XIX consistia en el sistema de vot transferible usat principalment per a elegir a diversos candidats. (...[descripció matemàtica del sistema](#))

De vegades s'utilitzen variants d'aquest sistema quan s'elegeixen partits per comptes de persones. En el sistema de la llista, els votants voten pels partits i els candidats s'elegeixien de la llista posada per cada partit. El número d'elegits per cada partit està en certa proporció del nombre de vots obtinguts. S'han proposat diferents regles de comput per a determinar el nombre de candidats a ser elegits d'una llista. La regla de l'elevat-promig va ser inventada per Víctor el d'Hondt. (...[descripció de la regla](#)) Amb aquest sistema de representació proporcional es estrany que un partit obtingui una majoria absoluta. Aquest sembla un dels desavantatges del sistema per uns i una avantatge per uns altres.

Nosaltres hem de mencionar el treball de representació proporcional de Dodgson elaborat en la dècada del 1880 quan va considerar el prorrateig dels representants en els districtes. (...[es junten dos paràgrafs no massa connexes](#)) dins les discussions per a la reforma electoral de l'època, i en el qual es van proposar idees que es van adelantar a la teoria de jocs.

La dificultat de tots els sistemes de votació es que, com es pot demostrar matemàticament, no hay cap sistema satisfactori Així ho demostrà Kenneth Arrow mitjançant la coneguda Paradoja d'Arrow⁵. La paradoja d'Arrow prova que no hi ha un sistema satisfactori d'agregar les

⁴ N del T. No ho tradueixo perquè es refereix als procediments moderns d'anàlisi de l'elecció social

⁵ N del T Teorema de la Impossibilitat d'Arrow

preferències individuals en una política per a la societat en conjunt. Això és, en definitiva, en el que s'ha basat la nostra idea de democràcia. A més a més, Arrow demostra que no es possible agregar les preferències individuals en una preferència social sota quatre supòsits que semblen clarament obvis. Els axiomes son:

1. cada elecció possible dels individus ha de generar una elecció agregada;
2. si tots els individus tenen les mateixes preferències, l'agregat no pot alterar aquest ordre
3. La preferència agregada no pot dependre solament de la elecció d'un sol individu;
4. l'ordenació agregada de preferències no ha de dependre dels individus en cap altre sentit que no sigui respectant la seva ordenació de preferències.

Amb aquests quatre axiomes Arrow provà que no hi cap procediment per a agregar les preferències individuals en una funció de preferències pel conjunt de la societat . Malgrat aquest resultat, les democràcies continuaran mantenint les eleccions i la consulta electoral per a determinar la política a seguir.